

# Rechenmethoden der Physik II, Präsenzübung 1

Dozent: PD Dr. Michael Flohr

Übungsleiter: Markus Otto

11.04.2008

## [P1] Jacobimatrix

Es sei

$$\vec{x}(\vec{u}) = \vec{x}(u_1, \dots, u_n) = (x_1(u_1, \dots, u_n), x_2(u_1, \dots, u_n), \dots, x_k(u_1, \dots, u_n))^T$$

eine vektorwertige Funktion von  $n$  Variablen und  $k$  Komponenten. Die Jacobimatrix enthält zeilenweise die Gradienten der einzelnen Komponentenfunktionen  $x_i(\vec{u})$ :

$$\text{Jac}_{\vec{u}} \vec{x}(u_1, \dots, u_n) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_k}{\partial u_1} & \frac{\partial x_k}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_k}{\partial u_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \text{grad}_{\vec{u}} x_1 & - \\ - & \text{grad}_{\vec{u}} x_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \text{grad}_{\vec{u}} x_k & - \end{pmatrix}$$

(a) Man berechne die Jacobimatrix  $M := \text{Jac}_{(\rho, \varphi, z)} \vec{x}$  der Abbildung

$$\vec{x}(\vec{u}) \equiv \vec{x}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} x_1(\rho, \varphi, z) \\ x_2(\rho, \varphi, z) \\ x_3(\rho, \varphi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante (heißt Funktionaldeterminante).

(b) Man gebe das totale Differential

$$d\vec{x} = \text{Jac}_{\vec{u}} \vec{x} \cdot d\vec{u}^T$$

an. Wie lautet das Linienelement  $(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$ ?

(c) Wie lautet die Umkehrtransformation obiger Abbildung,  $\vec{u} := (\rho, \varphi, z)^T = ?$  Man bestimme  $N := (\text{Jac}_{\vec{x}} \vec{u})|_{\vec{x}}$  und berechne  $M \cdot N$ . Wie ist das Ergebnis zu deuten?

## [P2] Allgemeine krummlinige Koordinaten

Wir kennen bisher im wesentlichen die folgenden Koordinatensysteme: Karthesisch, Polar, Zylinder, Kugel. Wir werden nun das ganze verallgemeinern.

(a) Gegeben sei der Ortsvektor  $\vec{x}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , wobei die  $u_i$  beliebige Koordinaten sein können. Man erhält hieraus die neuen Basisvektoren durch Ableiten:

$$\vec{e}_{u_i} = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \right|^{-1} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}$$

Man führe dieses explizit für Zylinderkoordinaten durch. Bilden die berechneten Vektoren ein VONS? Skizze!

(b) Man berechne für zeitabhängige Zylinderkoordinaten  $\rho = \rho(t), \varphi = \varphi(t)$  und  $z = z(t)$  die Ableitung  $\dot{\vec{x}}(t)$ . Lassen sich aus dem Ergebnis die Vektoren aus (a) melken?

(c) Auch  $\nabla$  transformiert bei Koordinatenwechsel:

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \vec{e}_{u_i} \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial u_i}$$

Für Zylinderkoordinaten tun! Was muss dann  $\nabla_{\vec{u}} \cdot (\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi), z)$  liefern?